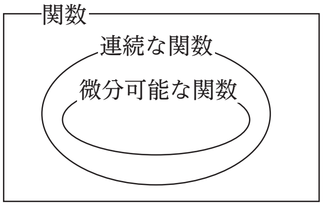
PART2 導関数

要点整理と公式

要点 ① 導関数



関数 $f(x)$ が，ある区間 I に属するすべての x の値で微分可能であるとき，関数 $f(x)$ はその「区間 I で微分可能」である，という。このとき，$f(x)$ は区間 I で連続である。

関数 $f(x)$ がある区間 I で微分可能であるとき，I に属する各値 a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させることにより，区間 I で定義させる 1 つの新しい関数が得られる。これを関数 $f(x)$ の「　　　　」といい，記号「　　　　」で表す。関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を「　　　　」という。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式で定義される。

導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(ex) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ の導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)-2}-\dfrac{1}{x-2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-2-\{(x+h)-2\}}{\{(x+h)-2\}(x-2)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{\{(x+h)-2\}(x-2)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\{(x+h)-2\}(x-2)}=-\frac{1}{(x-2)^2}$$

関数 $y=f(x)$ において，x の増分 h を Δx，y の増分 $f(x+\Delta x)-f(x)$ を Δy とすると，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

と表される。また，関数 $f(x)$ の導関数は，$f'(x)$ のほかにも y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などの記号でも表す。

[NOTE]

2 次の関数を，導関数の定義にしたがって微分せよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

Point Pickup

導関数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

第 7 講　PART2 確認問題

次の関数を，定義にしたがって微分せよ。

答えは下の①～⑥のうちから選べ。

1　$f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{イ}}}{x(x+h)}$$

$$=\boxed{\text{ウ}}$$

① 1　② -1　③ x

④ $x+h$　⑤ $\dfrac{1}{x^2}$　⑥ $-\dfrac{1}{x^2}$

2　$f(x)=\sqrt{x-1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}-\sqrt{x-1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\text{オ}}}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}$$

$$=\boxed{\text{カ}}$$

① 1　② -1　③ $x+h$

④ $x+h-1$　⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$　⑥ $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

PART2 導関数

2 次の関数を，導関数の定義にしたがって微分せよ。

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

[解答]

(1) $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-2hx-h^2}{(x+h)^2x^2}=\lim_{h\to0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2}=\frac{-2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}$

(2) $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2(x+h)-1}-\sqrt{2x-1}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{2(x+h)-1\}-(2x-1)}{h\{\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}\}}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{2h}{h\{\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}\}}=\lim_{h\to0}\frac{2}{\sqrt{2(x+h)-1}+\sqrt{2x-1}}$

$=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

第 7 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：④，イ：②，ウ：⑥

[解説]

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [A]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\boldsymbol{x+h}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{x(x+h)}$$ [B]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{-1}}{x(x+h)}$$

$$=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}^2}$$

[A]　導関数の定義
$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

[B]　分母・分子が h で約分できる。

2　**[正解]** エ：④，オ：①，カ：⑥

[解説]

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ [C]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\boldsymbol{x+h-1}}-\sqrt{x-1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h-1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}$$

[D]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-1)-(x-1)}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}}$$

$$=\frac{\boldsymbol{1}}{2\sqrt{\boldsymbol{x-1}}}$$

[C]　導関数の定義
$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

[D]　分母・分子に $\sqrt{x+h-1}+\sqrt{x-1}$ をかけて，分子を有理化する。